# Домашна работа 2 по Алгебра 1. 4 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

14 Ноември 2021

**4 Въпрос** Да се намери рангът на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & p & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & q & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

в зависимост от стойностите на комплексните параметри $p, q \in \mathbb{C}$

**Решение:** Умножаваме втори ред по $-1$ и събираме с първи. Събираме трети ред с четвърти. Разменяме първи ред с втори, втори с трети и трети с четвърти. Получаваме:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & q+1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & p-2 & 5 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред с -1 и събираме с втори.

Получения втори ред делим на 2 и събираме с първи и четвърти.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & q+1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & p-\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

**I. Случай:** $q+1=0, \quad p-\frac{1}{2}=0 \qquad q=1, \quad p=\frac{1}{2}$

С резултатната матрица, делим трети ред на 10. Умножваме го по -5 и събираме с четвърти, умножаваме трети по 2 и събираме с първи. Резултатът е матрица в Гаус-Жорданов вид с три линейно независими вектора. $\implies \operatorname{rk}(A) = 3$

**II. Случай:** $q+1=0, \quad p-\frac{1}{2}\neq 0 \qquad q=1, \quad p\neq\frac{1}{2}$

С резултатната матрица, делим трети ред на 10. Чрез умножения и събирания с другите редове, занулуваме четвъртата им колона.

Делим четвърти ред с $p-\frac{1}{2}$ и пак чрез умножения и събирания с другите редове, занулуваме третата им колона.

Финално, разменяме последните два реда и получаваме Гаус-Жорданов вид с четири линейно независими вектора. $\implies \operatorname{rk}(A) = 4$

**III. Случай:** $q+1\neq 0, \quad p-\frac{1}{2}=0 \qquad q\neq 1, \quad p=\frac{1}{2}$

Четвърти ред делим на 5. Чрез умножения и събирания с другите редове, занулуваме четвъртата им колона.

Делим трети ред на $q+1$, умножаваме по -2 и събираме с втори ред. Умножаваме втори ред по $-\frac{5}{2}$ и събираме с първи. Разменяме втори и трети ред.

Получаваме Гаус-Жорданов вид с четири линейно независими вектора. $\implies \operatorname{rk}(A) = 4$

**IV. Случай:** $q+1\neq 0, \quad p-\frac{1}{2}\neq 0 \qquad q\neq 1, \quad p\neq\frac{1}{2}$

Умножаваме трети ред по $\frac{-2}{q+1}$ и събираме с втори ред. Умножаваме четвърти ред по $\frac{1}{p-\frac{1}{2}}$ и събираме с втори ред.

Втори ред има само една ненулева стойност, и то в четвърта колона. Делим, умножаваме и събираме с другите редове, така че да занулим четвъртата им колона.

Правим подобно с трети и четвърти ред. Разменяме редове и получаваме Гаус-Жорданов вид с четири линейно независими вектора. $\implies \operatorname{rk}(A) = 4$

$\implies$ Ако $q = 1$ и $p = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{rk}(A) = 3$, иначе $\operatorname{rk}(A) = 4$